

基于两幅模糊与噪声图像的图像交替修复算法

刘瑞华^{1),2)} 鲍政²⁾ 黎芳²⁾

¹⁾(重庆理工大学数理学院,重庆 400054) ²⁾(华东师范大学数学系,上海 200062)

摘要 针对一幅模糊图像和一幅噪声图像的图像修复问题,提出了一种结合 TV-L¹ 模型与 TV 模型的新交替修复算法。该算法首先利用 TV-L¹ 模型对噪声图像进行去噪;然后利用 TV 模型,把去噪结果作为迭代初始值,对于模糊图像去模糊;最后,把去模糊结果作为迭代初始值,再利用 TV-L¹ 模型对噪声图像进行去噪……,如此交替进行。实验效果表明,该新算法不仅继承了 TV-L¹ 模型与 TV 模型能保持轮廓和细节的优点,同时也有效地克服了这两种模型会降低对比度和出现“重影”的缺点。

关键词 模糊图像 噪声图像 图像修复 交替修复

中图法分类号: TP391.41

文献标识码: A

文章编号: 1006-8961(2009)12-2451-05

An Image Alternate Restoration Algorithm Based on Two Blurred/Noisy Images

LIU Rui-hua^{1),2)}, BAO Zheng²⁾, LI Fang²⁾

¹⁾(School of Mathematics and Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054)

²⁾(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062)

Abstract In this paper, the image restoration problem is studied with a given blurred image and a noisy image. We propose a new algorithm combining a TV-L¹ de-noising model with a total variational deblurring model. In our algorithm, we use TV-L¹ model to de-noise the noisy image in the first; Then we use the TV model to deblur the blurred image by taking the de-noised result obtained in the second step as the initial value of the next iteration; Finally, they use TV-L¹ model again to de-noise the noisy image by taking the de-blurred result got in the second step as the initial value of the next iteration. . . , and so on. Experimental results tell us that our new algorithm not only inherits the advantage of edge preserving of the TV-L¹ model and the TV model, but also overcomes its' disadvantage of degrading the contrast of image.

Keywords blurred image, noisy image, image restoration, altering restoration

1 引言

一般情况下,人们所观察到的图像都带有噪声,或者模糊。图像噪声主要来源于图像获取和传输过程的各种干扰,常见的噪声有高斯噪声、椒盐噪声、Poisson 噪声等;图像模糊主要来源于相机与景物的相对运动、散焦、相机的机械振动等,常见的模糊方

式有高斯模糊、运动模糊与散焦等。

近年来,变分方法被广泛地应用于图像处理领域^[1-7],特别是在图像去噪、图像去模糊、图像分割等方面。在图像去噪方面,针对加性噪声(例如高斯噪声),本文只介绍最为重要的两个变分模型。1992年,Rudin等人提出了 ROF 模型(即 TV-L² 模型)^[1]。2005年,Chan等人提出了 TV-L¹ 模型^[4]。比较而言,TV-L¹ 模型的去噪效果稍好一些,但是去

基金项目:国家自然科学基金项目(0971239);高等学校博士学科点专项科研项目(200802691037)

收稿日期:2007-07-25;改回日期:2008-11-21

第一作者简介:刘瑞华(1975~),男。2008年于华东师范大学基础数学专业获理学博士学位,现聘为重庆理工大学副教授。主要研究方向为图像处理与微分几何。E-mail:lruh@sohu.com

噪后的图像对比度会发生变化。图 1 展示了 TV- L^1 模型修复高斯噪声图像的效果。图 1(a) 是 300×300 大小的原始图像,图 1(b) 是在原始图像上加上均值为 0,方差为 σ^2 的高斯噪声的噪声图像,图 1(c) 是利用 TV- L^1 模型修复后的结果。实验结果表明,修复后图像的对比度下降。对于图像的去模糊,在模糊方式已知的情况下,Matlab 中已有 Wiener 滤波器、正则滤波器以及 Lucy-Richardson (L-R) 方法。变分模型是去模糊最重要的模型之一。1998 年,Chan 等人提出了全变差去模糊模型 (total variational model, 简记为 TV 模型)^[5]。比较上述的几种方法,L-R 方法和 TV 模型修复的效果稍好。不过这两种方法修复后的图像,都会出现“重影”。图 2(a) 是原始图像与点扩散函数 (PSF),图 2(b) 是模糊图像,图 2(c) 是利用 L-R 方法修复的图像,图 2(d) 是利用 TV 模型修复的图像。从图 2 可以看出,修复的图像中出现了“重影”,但是 TV 去模糊模型在保持细节方面的效果稍好一些。

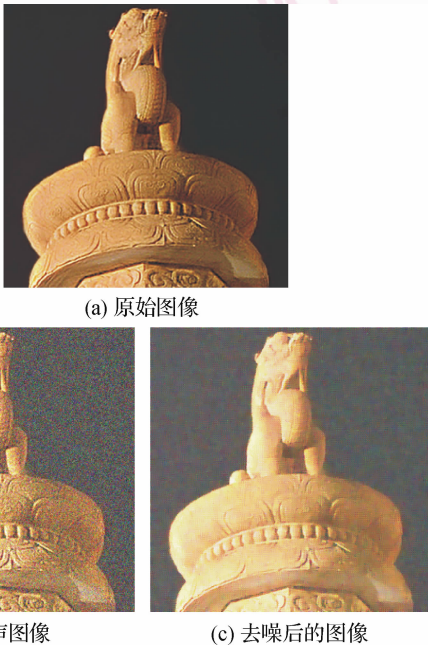


图 1 TV- L^1 模型修复的效果

Fig. 1 Result of TV- L^1 model

针对用 TV- L^1 去噪模型修复的图像对比度下降和用 TV 去模糊模型修复的图像产生“重影”的缺点,本文提出了一种新的交替修复算法,即通过选取不同的迭代初始值来交替使用 TV- L^1 模型去噪和 TV 模型去模糊。新的算法不仅具有保持轮廓、细节的优点,同时也克服了单一方法产生对比度下降和“重影”的缺点。

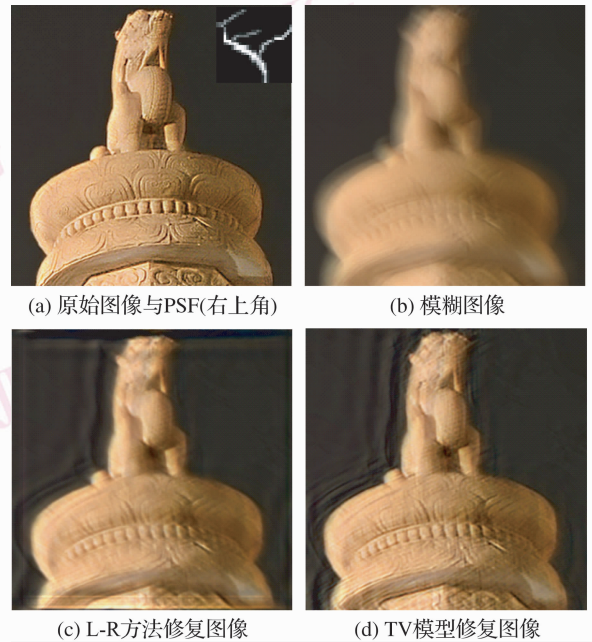


图 2 用 L-R 方法和 TV 模型修复的效果

Fig. 2 Results of L-R method and TV model

2 算法的提出

从实验结果 (图 1、图 2) 可看出,单独使用 TV- L^1 去噪模型或者 TV 去模糊模型都有缺陷,例如 TV- L^1 去噪模型修复的结果会出现对比度下降 (图 1),TV 去模糊模型修复的效果会出现“重影” (图 2)。出现这种情况的其中一个原因是初始值的估计不合适。如果初始值估计合适,则修复的效果将会更好。基于这样的想法,本文假定已知一幅噪声图像和一幅模糊图像 (点扩散函数已知),目标是要修复出一幅质量较高的图像。

降质噪声图像模型可描述为:设真实图像函数为 $u(\mathbf{x})$,观察到的噪声图像函数为 $z_N(\mathbf{x})$,那么

$$z_N(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x})$$

其中, $\eta(\mathbf{x})$ 表示附加噪声。在实验中统一采用均值为 0,方差为 σ^2 的高斯噪声。

降质模糊图像模型可以描述为:设真实图像函数为 $u(\mathbf{x})$,观察到的模糊图像函数为 $z_B(\mathbf{x})$,那么

$$z_B(\mathbf{x}) = (h * u)(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x})$$

其中,“ $*$ ”表示卷积, $\eta(\mathbf{x})$ 表示噪声, $h(\mathbf{x})$ 表示点扩散函数 (PSF),且 $\int_{\Omega} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1, h(\mathbf{x}) \geq 0, \Omega$ 表示点扩散函数 $h(\mathbf{x})$ 的定义域。

TV- L^1 模型可以描述为下面的能量泛函极小化问题:

$$\min_u E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \lambda \int_{\Omega} |u(\mathbf{x}) - z_N(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \quad (1)$$

TV 去模糊模型可以描述为如下的能量泛函极小化问题:

$$\min_u E(u) = \frac{1}{2} \|(h * u)(\mathbf{x}) - z_B(\mathbf{x})\|_{L^2}^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \quad (2)$$

从图 1(c)和图 2(d)可以看出,去噪后的图像比去模糊后的图像稍微逼近真实图像。所以,本文首先利用 TV- L^1 模型(式(1))去除噪声;然后把第 1 次去除噪声后的图像作为迭代初始值,再利用 TV 模型(式(2))去模糊;接着利用第 1 次去模糊的图像作为第 2 次去噪声的迭代初始值,如此交替重复下去,这样就可以得到比较好的修复效果,可称这种算法为交替修复算法。具体的算法步骤如下:

- (1) 利用式(1)模型去噪声,迭代初始值 $u_0 = z_N$,得到去噪图像 \hat{u}_{DN} (如图 1(c)所示);
- (2) 利用式(2)模型去模糊,迭代初始值 $u_0 = \hat{u}_{DN}$,得到去模糊图像 \hat{u}_{DB} (如图 3(a)所示);
- (3) 重复步骤(1),但是迭代的初始值为步骤(2)得到的去模糊图像,即 $u_0 = \hat{u}_{DB}$,再一次得到去噪图像 \hat{u}_{DN} (如图 3(b)所示);如此重复步骤(1)与



(a) 第1次去模糊的图像



(b) 第2次去噪声的图像



(c) 第2次去模糊的图像

图 3 利用交替修复算法修复的效果

Fig. 3 Results of altering restoration algorithm

步骤(2),重复两次就可以取得较好的修复效果。

图 3(a)是利用去噪声后的结果作为初始值第 1 次去模糊后的图像,图 3(b)是第 2 次去噪声后的图像,图 3(c)是第 2 次去模糊的图像。图 1(a)是其原始图像。图 3(b)表明了再次去噪声后的图像不仅基本上保持了原图像的对比度,同时也保持了部分细节,图 3(c)也基本上显示没有“重影”,同时保持了部分细节。

3 能量极小的存在性

在式(1)模型中,对泛函的能量极小已经有了较完备的讨论,在此就不再叙述。但是,对于式(2)模型,泛函的能量极小以及解的存在性都还没有讨论,为此,下面讨论此泛函的能量极小解的存在性。

引理 1^[6] 对于任意函数 $f \in L^1(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$, 有

$$\|f * g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^2}$$

引理 2 设函数 $g \in L^2(\Omega)$, 记 $h \cdot g = h * g$, h 是点扩散函数,则有 $h * 1 = 1$, 即表示点扩散函数作用在常数上,仍是原来的常数。

证明: 设函数 $g(\mathbf{x}) = c$, c 是任意常数,由 h 的定义有

$$\begin{aligned} h * c &= (h * g)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} h(\mathbf{y})g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= c \int_{\Omega} h(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = c \end{aligned}$$

考虑图像函数 $u(\mathbf{x}) \in BV(\Omega)$, 于是式(2)极小化问题变为

$$\min_{u \in BV(\Omega)} E(u) = \frac{1}{2} \|(h * u)(\mathbf{x}) - z_B(\mathbf{x})\|_{L^2}^2 + \alpha \int_{\Omega} |Du| \quad (3)$$

其中, $Du = |\nabla u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + D_s u$, $|\nabla u| d\mathbf{x}$ 为正则部分, $D_s u$ 为奇异部分, $\int_{\Omega} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1, h(\mathbf{x}) \geq 0$, 记

$$|Du|(\Omega) := \int_{\Omega} |Du| = \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |D_s u|$$

定理 1 式(3)极小化问题存在极小解 $\hat{u} \in BV(\Omega)$ 。

证明: 任取极小化序列函数 $\{u_n\}$, 记 $\bar{u}_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, 根据文献[7], 有

$$|Du|(\Omega) \leq M \quad (4)$$

$$\|(h * u)(\mathbf{x}) - z_B(\mathbf{x})\|_{L^2}^2 \leq M \quad (5)$$

其中, $M > 0$ 是广义的界。

由广义的 Poincare-Wirtinger 不等式^[7]以及根据式(4), 有

$$\|u_n(\mathbf{x}) - \bar{u}_n(\mathbf{x})\|_{L^2} \leq C |Du_n|(\Omega) \leq M \quad (6)$$

又由 $h(\mathbf{x})$ 的约束条件知, 有 $\|h(\mathbf{x})\|_{L^1} \leq M$ 。结合式(6)以及引理 1 和引理 2, 于是有

$$\|(h * u_n)(\mathbf{x}) - \bar{u}_n(\mathbf{x})\|_{L^2}^2 = \|(h * (u_n - \bar{u}_n))(\mathbf{x})\|_{L^2}^2 \leq \|h(\mathbf{x})\|_{L^1} \|u_n(\mathbf{x}) - \bar{u}_n(\mathbf{x})\|_{L^2}^2 \leq M$$

又由式(5)有

$$\begin{aligned} M &\geq \int_{\Omega} |(h * u_n)(\mathbf{x}) - z_B(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} |(h * u_n)(\mathbf{x}) - \bar{u}_n(\mathbf{x}) + \bar{u}_n(\mathbf{x}) - z_B(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} |(h * (u_n - \bar{u}_n))(\mathbf{x}) + \bar{u}_n(\mathbf{x}) - z_B(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \end{aligned}$$

于是有

$$M \geq \|\bar{u}_n(\mathbf{x}) - z_B(\mathbf{x})\|_{L^2} - \|(h * (u_n - \bar{u}_n))(\mathbf{x})\|_{L^2}$$

所以

$$\|\bar{u}_n\|_{L^2} \leq M \quad (7)$$

结合式(6)、式(7), 有

$$\|u_n\|_{L^2} = \|u_n - \bar{u}_n + \bar{u}_n\|_{L^2} \leq \|u_n - \bar{u}_n\|_{L^2} + \|\bar{u}_n\|_{L^2} \leq M$$

于是序列 $\{u_n\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 有界, 则在 $L^1(\Omega)$ 也有界, 结合式(4), 即有序列 $\{u_n\}$ 在 $BV(\Omega)$ 中有界, 所以存在子列, 仍记为序列 $\{u_n\}$, 存在 $\hat{u} \in BV(\Omega)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 使得 $u_n \xrightarrow[\text{弱 } BV-w^*]{\text{弱}} \hat{u}$ 。

最后, 又由于正则项凸性, 以及保真项的连续性, 有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|(h * \hat{u})(\mathbf{x}) - z_B(\mathbf{x})\|_{L^2}^2 + \alpha \int_{\Omega} |D\hat{u}| \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \|(h * u_n)(\mathbf{x}) - z_B(\mathbf{x})\|_{L^2}^2 + \alpha \int_{\Omega} |Du_n| \right\} \end{aligned}$$

4 离散格式与数值实现

假设图像函数是离散的, 记为 $u_{i,j}$, $D_x u_{i,j} =$

$$\frac{1}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}), D_y u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}),$$

$|\nabla u_{i,j}| = \sqrt{(D_x u_{i,j})^2 + (D_y u_{i,j})^2}$ 。在 TV-L¹ 和 TV 模型的处理过程中, 都是采用最速下降法来求数值解, 所有的程序都是在 Matlab 环境下实现。信噪比 (SNR) 按照下式计算:

$$\text{SNR} = \frac{\int_{\Omega} (I - \bar{I})^2}{\int_{\Omega} (I_0 - I)^2}, \bar{I} = \frac{\left(\int_{\Omega} I\right)}{|\Omega|}$$

其中, I 是真实图像, I_0 是被污染的图像。

具体的实现步骤如下:

(1) 利用 TV-L¹ 模型去除噪声 (伪代码)

初始值 $U_0 \leftarrow Z_N$, 步长 $\tau = \tau_0$ (默认值为 0.5), $\lambda = \lambda_0$ (默认值为 0.001)。

For k 为迭代次数 (默认值为 50)

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} + \tau \left(\text{div} \left(\frac{\nabla U^{(n)}}{|\nabla U^{(n)}| + \varepsilon} \right) - \lambda \text{sgn}(U^{(n)} - Z_N) \right)$$

End 得到去噪的结果, 记为 \hat{U}_{DN}

(2) 利用 TV 模型去模糊 (伪代码)

初始值 $U_0 \leftarrow \hat{U}_{DN}$, 步长 $\tau = \tau_0$ (默认值为 1), $\alpha = \alpha_0$ (默认值为 0.01)。

For k 为迭代次数 (默认值为 50)

$$U^{(n+1)} = U^{(n)} + \tau \left(\text{div} \left(\frac{\nabla U^{(n)}}{|\nabla U^{(n)}| + \varepsilon} \right) - \lambda H^* (HU^{(n)} - Z_B) \right)$$

End 得到去模糊的结果, 记为 \hat{U}_{DB} 。

(3) 重复步骤(1)、(2), 但是初始值为前一次的处理结果。

其中, U_0 表示初始列向量矩阵; Z_N, Z_B 分别表示噪声图像、模糊图像按行排列的列向量; $\hat{U}_{DN}, \hat{U}_{DB}$ 分别表示去噪后的图像、去模糊后的图像按行排列的列向量; $U^{(n)}, \nabla U^{(n)}, |\nabla U^{(n)}|$ 分别表示第 n 步迭代后图像矩阵、梯度矩阵、梯度模矩阵按行排列的列向量; H, H^* 分别表示点扩散函数的 Toeplitz 矩阵和共轭转置矩阵。

一般地, 只要重复 1~2 次就可以得到很好的图像修复结果。

下面的实验所用图像的大小为 400×400 。图 4(b) 是利用 TV 模型, 针对一幅模糊图像 (图 4(a)) 在点扩散函数已知 (如图 4(a) 右上角所示) 的情况下修复的效果图。图 5(b) 是利用 TV-L¹ 模型对一幅噪声图像 (图 5(a)) 进行修复的效果图。图 6(a)~图 6(c) 是用本文的交替迭代算法第 1 次去模糊、第 2 次去噪声、第 2 次去模糊的修复效果图, 图 6(d) 是原始图像。

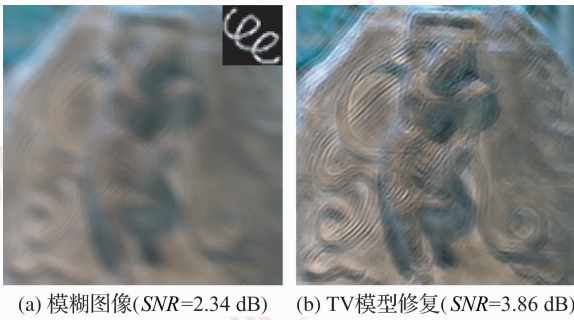


图 4 利用 TV 模型修复一幅模糊图像的效果图
Fig. 4 Result of TV model using single blurred image

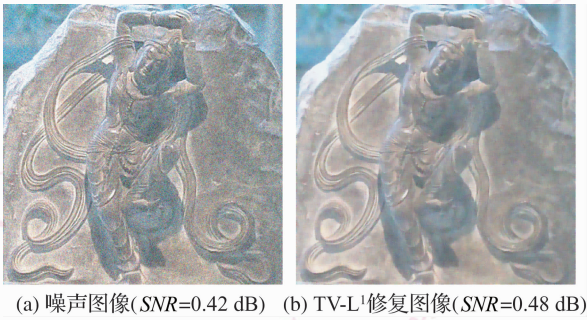


图 5 利用 TV-L¹ 模型修复一幅带噪声图像的效果图
Fig. 5 Result of TV-L¹ model using single noisy image

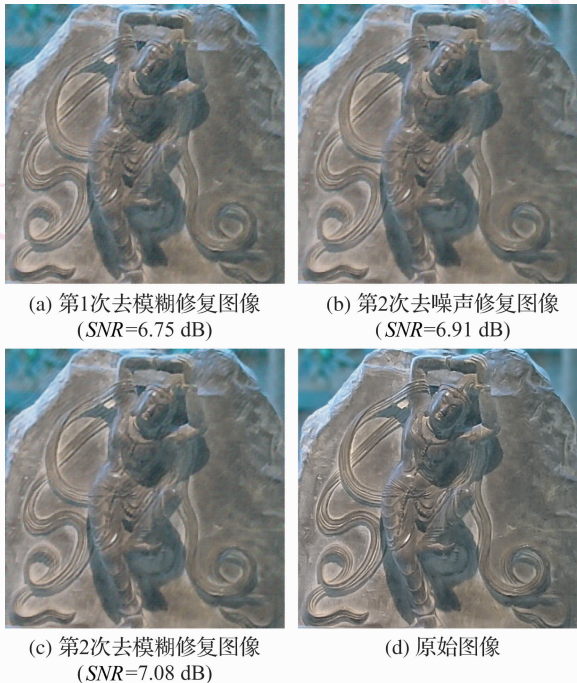


图 6 本文交替修复算法的修复效果
Fig. 6 Results of our altering restoration algorithm

5 结 论

从图 3(a) ~ 图 3(c) 和图 6(a) ~ 图 6(c), 以及从图 4 ~ 图 6 信噪比的比较可以得出, 本文提出的交迭代算法其图像修复结果不仅具有 TV-L¹ 模型和 TV 模型能保持轮廓、细节的优点, 同时也能较好地保持对比度不变和消除“重影”, 以及有较高的信噪比。但是在最终的图像修复结果中, 还是有一些细节没有修复, 这就要求进一步改进算法, 对于去模糊与去噪声演化方程解的存在性理论的研究, 将在以后的研究工作中做进一步的研究。

参考文献 (References)

- 1 Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physics D*, 1992, **60**: 259-268.
- 2 Rudin L, Lions P, Osher S. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics*[M]. New York, USA: Springer-Verlag, 2003: 103-120.
- 3 Asaki T, Chartrand R, Le T. A variational approach to reconstructing images corrupted by poisson noise [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2007, **27**(3): 257-263.
- 4 Chan T, Esedoglu S. Aspects of total variation regularized L1 function approximation[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2005, **65**(5):1817-1837.
- 5 Chan R, Chan T, Wong C. Cosine transform based preconditioners for total variation deblurring [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1999, **8**(10):1472-1478.
- 6 Kirsch A. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*[M]. New York, USA: Springer-Verlag, 1996: 29.
- 7 Aubert G, Kornprobst P. *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of Variations Applied Mathematical Sciences* [M]. New York, USA: Springer-Verlag, 2001:36-127.